**Handreichung zum Arbeitsblatt: „Der Wurzelsatz von Vieta“**

**Mathematisches Gebiet:** Quadratische Gleichungen

**Zielgruppe:** Gymnasium, Klasse 9

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Erarbeitung und Übung Quadratische Gleichungen

(Gymnasium: LB 1 „Funktionen und Potenzen“)

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Kenntnis quadratischer Gleichungen (in Normalform)
* Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen

**Inhalt:**

Dieses Blatt bietet eine Einführung in den Wurzelsatz von Vieta. Dies wird ergänzt durch den Beweis, der über ein Beweispuzzle bearbeitet wird. Weiterhin werden vielfältige Anwendungen des Wurzelsatzes als Aufgaben gestellt. Eine Vielzahl an Zusatzaufgaben ergänzt das Blatt.

Das Material ist eingebunden in ein Gruppenpuzzle zum Aufgabenpool „Übungen zum historischen Lösen Quadratischer Gleichungen“, es kann aber auch einzeln bearbeitet werden. Es beinhaltet Aufgaben, Erwartungshorizont und ist mit Ergänzung des Ergebniszettels gut auszuwerten. Es gibt Zusatzaufgaben und Hilfestellungen in Form von Briefumschlägen am Stationstisch.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Die Schülerinnen und Schüler können den Wurzelsatz von Vieta formulieren.
* Die Schülerinnen und Schüler können den Satz mit Hilfe eines Beweispuzzles beweisen.
* Die Schülerinnen und Schüler können quadratische Gleichungen mit dem Wurzelsatz von Vieta lösen.

**Materialbedarf:**

* Kopien der Arbeitsblätter, Laufzettel des Aufgabenpools

**Zeitbedarf:**

* $20 min.$ Einführung Satz und Beweis
* $20 min.$ Aufgaben
* $45 min.$ Zusatzaufgaben

**Benötigte Medien:**

* Laptop mit Beamer (nur nötig zur Ein- und Ausführung des Aufgabenpools)

# Der Wurzelsatz von Vieta

## Ursprung – François Viète

François Viète, latinisiert Vieta, war ein französischer Mathematiker und Astronom des 16. Jahrhunderts (1540-1603). Er war als Berater und Jurist der französischen Könige Heinrich III und IV tätig. Wichtig ist er mathematikhistorisch besonders als Vorbereiter einer strikt symbolischen Algebra. Er führte die Nutzung von Buchstaben als Variablen ein, half beim Vorantreiben des Umformens von Termen und Gleichungen, und nutzte Symbole für Plus $+$ und Minus $–$ sowie den Bruchstrich $\frac{}{}$. Heutzutage ist Vieta bekannt für seinen Wurzelsatz.

Vieta (CC0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois\_Viete.jpg)

Mit diesem werdet ihr euch im Folgenden auseinandersetzen!

## Der Satz



Originalsatz aus ”De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo“ (Alten, et al., 2014, S. 288)

Eine moderne Übersetzung dieses Originals lautet:

„Falls

$$x^{2}+\left(-x\_{1}-x\_{2}\right)x=-x\_{1}x\_{2}$$

ist, so kann für $x$ nach Belieben $x\_{1}$ oder $x\_{2}$ als Lösung eingesetzt werden.“ (Mäder, 1992, S. 21)

## Aufgabe 1

***Erstellt*** *eine aktuelle Schreibweise über die Koeffizienten* $p,q$ *und füllt damit die Lücken:*

Gegeben sei die quadratische Gleichung in Normalform:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

sowie deren Lösungen $x\_{1}$ und $x\_{2}$. Dann gilt:

$$p= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$q= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

## Aufgabe 2

***Beweist*** *den obigen Satz mittels Beweispuzzle. Bringt dafür die gegebenen Schritte in die richtige Reihenfolge.*

## Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$x\_{1}=4 x\_{2}=-1$$

***Bestimmt*** *die zu diesen Lösungen gehörende Gleichung.*

***Begründet****, warum ihr keine weitere Gleichung mit diesen Lösungen finden könnt.*

## Aufgabe 4

Gegeben ist die quadratische Gleichung

$$x^{2}-4x-12=0$$

***Bestimmt*** *über Vieta die Lösungen der Gleichung.* ***Beschreibt*** *dabei euer Vorgehen.*

***Stellt*** *eine Gleichung* ***auf****, die sich so nur schwer lösen lässt.* ***Begründet****.*

## Zusatzaufgaben

1. Gegeben ist die quadratische Gleichung:

$$x^{2}+8x=0$$

***Belegt*** *über Angabe der Lösungen, dass der Satz von Vieta noch immer gilt.*

***Übertragt*** *eure Überlegungen auf den allgemeinen Fall der Normalform* $x^{2}+px=0$*.*

1. Gegeben ist die quadratische Gleichung:

$$x^{2}+9=0$$

***Belegt*** *über Angabe der Lösungen, dass der Satz von Vieta noch immer gilt.*

***Übertragt*** *eure Überlegungen auf den allgemeinen Fall der Normalform* $x^{2}+q=0$*.*

1. Gegeben ist eine der Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$x\_{1}=2$$

***Stellt*** *eine zugehörige Gleichung mit mindestens dieser Lösung* ***auf****.*

***Belegt*** *über ein Beispiel, dass eine weitere Gleichung mit dieser Lösung existiert.*

1. Gegeben sind die Lösungen $x\_{1}, x\_{2}$ einer quadratischen Gleichung in Normalform. Diese beschreiben die Gleichung eindeutig. Daher können wir die Gleichung in einer neuen Form schreiben, der sogenannten Linearfaktorform. Diese sieht dann so aus:

$$\left(x-x\_{1}\right)⋅\left(x-x\_{2}\right)=0$$

Ein Beispiel wäre

$$\left(x+3\right)\left(x-2\right)=0$$

***Formt*** *das Beispiel in die Normalform um.* ***Überprüft*** *die Lösungen.*

***Beschreibt*** *Vor- und Nachteile dieser Darstellung.*

***Beweist*** *die Äquivalenz zur Normalform.*

## Beweispuzzle zum Satz

Da zwei Lösungen gegeben sind, müssen diese die Gleichung erfüllen, es gilt also

$$x\_{1}^{2}+px\_{1}+q=0; x\_{2}^{2}+px\_{2}+q=0; $$

$$x\_{2}^{2}+px\_{2}+q=0$$

Diese beiden Gleichungen kann man gleichsetzen

$$x\_{1}^{2}+px\_{1}+q=x\_{2}^{2}+px\_{2}+q$$

Sofort fällt $q$ weg. Dessen Formel kommt später. Es bleibt:

$$x\_{1}^{2}+px\_{1}=x\_{2}^{2}+px\_{2}$$

Man bringt nun die quadratischen Terme auf eine Seite, die linearen auf die andere.

$$x\_{1}^{2}-x\_{2}^{2}=px\_{2}-px\_{1}$$

Jetzt kann man auf der rechten Seite $p$ ausklammern.

$$x\_{1}^{2}-x\_{2}^{2}=p(x\_{2}-x\_{1})$$

Auf der linken Seite folgt die Anwendung der 3. binomische Formel.

$$\left(x\_{1}-x\_{2}\right)\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=p(x\_{2}-x\_{1})$$

Da $\left(x\_{1}-x\_{2}\right)=-(x\_{2}-x\_{1})$ folgt also

$$-\left(x\_{2}-x\_{1}\right)\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=p(x\_{2}-x\_{1})$$

Nach Division durch $(x\_{2}-x\_{1})$, mit der Bedingung $x\_{1}\ne x\_{2}$, bleibt

$$-\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=p ⇔ p=-x\_{1}-x\_{2}$$

Dies beweist die erste Aussage.

Für die zweite Aussage setzt man $p=-(x\_{1}+x\_{2})$ in $x\_{1}^{2}+px\_{1}+q=0$ ein. Also:

$$x\_{1}^{2}-\left(x\_{1}+x\_{2}\right)x\_{1}+q=0$$

Durch Ausmultiplizieren bleibt:

$$x\_{1}^{2}-x\_{1}^{2}-x\_{1}x\_{2}+q=0$$

Die quadratischen Terme fallen weg.

Einfaches Umstellen durch $+x\_{1}x\_{2}$ ergibt die zweite Aussage

$$q=x\_{1}x\_{2}$$

## Hilfestellungen

Diese Hilfezettel sind als gestufte Hilfen angedacht, die individuell zum Einsatz kommen können und sich dafür ausgeschnitten in Briefumschlägen o.Ä. am Tisch der Station befinden.

Zu Aufgabe 3

Versucht, am Bsp. zu begründen. Zeigt, dass die Lösungen die Koeffizienten festlegen.

Wendet den Satz an und gewinnt daraus die Gleichung.

Zu Aufgabe 4

Überprüft die Gültigkeit der Kombinationen in der Summenbedingung von Vieta.

Stellt nach Vieta Produktbedingung die möglichen Lösungskombinationen auf.

Zu ZA 3

Denkt daran, was für die Lösungen gelten muss (Wurzelsatz!).

Gibt es erkennbare Einschränkungen für die zweite Lösung?

Zu ZA 4

Wann sind zwei Aussagen/Formen äquivalent? Überlegt, was ihr zeigen müsst.

Nutzt den Wurzelsatz zum Beweis. Wie müsst ihr diesen einsetzen?

# Erwartungsbild: „Der Wurzelsatz von Vieta“

## Aufgabe 1

***Erstellt*** *eine moderne Schreibweise und füllt damit die Lücken:*

Gegeben sei die quadratische Gleichung in Normalform

$$x^{2}+px+q=0$$

sowie deren Lösungen $x\_{1}$ und $x\_{2}$. Dann gilt:

$$p=-x\_{1}-x\_{2}$$

$$q=x\_{1}x\_{2}$$

## Aufgabe 2

***Beweist*** *den obigen Satz mittels Beweispuzzle. Bringt dafür die gegebenen Schritte in die richtige Reihenfolge.*

*Reihenfolge wie bereits auf dem Blatt gegeben.*

## Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$x\_{1}=4 x\_{2}=-1$$

***Bestimmt*** *die zu diesen Lösungen gehörende Gleichung.*

$$p=-x\_{1}-x\_{2}=-4-\left(-1\right)=-4+1=-3$$

$$q=x\_{1}x\_{2}=4⋅\left(-1\right)=-4$$

$$x^{2}-3x-4=0$$

***Begründet****, warum ihr keine weitere Gleichung mit diesen Lösungen finden könnt.*

Es kann nur diese eine Gleichung mit diesen Lösungen geben, da sich die Lösungen nur dann ändern, wenn man die Koeffizienten ändert, erkennbar an den Formeln des Satzes. Die Koeffizienten sind durch die Lösungen (und umgekehrt) eindeutig bestimmt.

## Aufgabe 4

Gegeben ist die quadratische Gleichung

$$x^{2}-4x-12=0$$

***Bestimmt*** *über Vieta die Lösungen der Gleichung.* ***Beschreibt*** *dabei euer Vorgehen.*

Über Vieta

$$-4=-x\_{1}-x\_{2} ⇔ 4=x\_{1}+x\_{2} ⇒ x\_{1}=4-x\_{2}$$

$$-12=x\_{1}x\_{2}$$

Aufstellen der infrage kommende Kombinationen für $q$:

$$-4=-x\_{1}-x\_{2} ⇔ 4=x\_{1}+x\_{2} ⇒ x\_{1}=4-x\_{2}$$

$$-12=x\_{1}x\_{2}$$

Überprüfung mit der Bedingung für $p$:

$$-3=4-4 nicht, 3=4-\left(-4\right) nicht -2=4-6=-2 passt$$

Die Lösungen sind also

$$x\_{1}=-2 x\_{2}=6$$

***Stellt*** *eine Gleichung* ***auf****, die sich so nur schwer lösen lässt.* ***Begründet****.*

$$x^{2}+\sqrt{5}x-99=0$$

Aufgrund der Koeffizienten kann man die Mglk. für das Produkt nicht per Hand bestimmen.

## Zusatzaufgaben

1. Gegeben ist die quadratische Gleichung:

$$x^{2}+8x=0$$

***Belegt*** *über Angabe der Lösungen, dass der Satz von Vieta noch immer gilt.*

$$8=-x\_{1}-x\_{2}$$

$$0=x\_{1}x\_{2}$$

Es folgt, dass $x\_{1}$ oder $x\_{2}=0$. Wir nehmen $x\_{2}=0$.

$$8=-x\_{1}$$

Also ist $x\_{1}=-8$ und Vieta gilt (Überprüfung auch durch Lösungsformel möglich).

***Übertragt*** *eure Überlegungen auf den allgemeinen Fall der Normalform* $x^{2}+px=0$*.*

$$p=-x\_{1}-x\_{2}$$

$$0=x\_{1}x\_{2} ⇒ x\_{2}=0$$

$$p=-x\_{1} ⇒ x\_{1}=-p$$

1. Gegeben ist die quadratische Gleichung:

$$x^{2}+9=0$$

***Belegt*** *über Angabe der Lösungen, dass der Satz von Vieta noch immer gilt.*

$$0=-x\_{1}-x\_{2} ⇒ x\_{1}=-x\_{2}$$

$$-9=x\_{1}x\_{2}=-x\_{2}^{2} ⇒ x\_{2}=\pm 3 ⇒ x\_{1}=\mp 3$$

SuS müssen nur eine Möglichkeit finden, nicht $\pm $ (Auch Lösungsformel möglich).

***Übertragt*** *eure Überlegungen auf den allgemeinen Fall der Normalform* $x^{2}+q=0$*.*

$$0=-x\_{1}-x\_{2} ⇒ x\_{1}=-x\_{2}$$

$$q=x\_{1}x\_{2}=-x\_{2}^{2} ⇒ x\_{2}=\pm \sqrt{-q} ⇒ x\_{1}=\mp \sqrt{-q }$$

1. Gegeben ist eine der Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$x\_{1}=2$$

***Stellt*** *eine zugehörige Gleichung mit mindestens dieser Lösung* ***auf****.*

Über Vieta

$$p=-2-x\_{2}$$

$x\_{2}$ beliebig, daher $x\_{2}=0$

$$p=-2$$

$$q=2⋅0=0$$

Dann ist unsere Gleichung

$$x^{2}-2x=0$$

***Belegt*** *über ein Beispiel, dass eine weitere Gleichung mit dieser Lösung existiert.*

Da $x\_{2}$ beliebig, nehme $x\_{2}=1$

$$p=-2-1=-3$$

$$q=2⋅1=2$$

Also ist eine weitere Gleichung

$$x^{2}-3x+2=0$$

1. … Ein Beispiel wäre

$$\left(x+3\right)\left(x-2\right)=0$$

***Formt*** *in die Normalform um.* ***Überprüft*** *die Lösungen.*

$$\left(x+3\right)\left(x-2\right)=x^{2}-2x+3x-6=x^{2}+x-6=0$$

$$x\_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}= -\frac{1}{2}\pm \frac{5}{2}$$

$$x\_{1}=2 x\_{2}=-3$$

***Beschreibt*** *Vor- und Nachteile dieser Darstellung.*

|  |  |
| --- | --- |
| Vorteile | Nachteile |
| Lösungen ablesbar | Koeffizienten nicht erkennbar |
| Einfach aufstellbar | Vorzeichenumkehrung fehleranfällig |
| Leicht erweiterbar auf höhere Grade |  |

***Beweist*** *die Äquivalenz zur Normalform.*

Ausmultiplizieren der obigen Form $0=\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$ liefert

$$0=x^{2}-x\_{2}x-x\_{1}x+x\_{1}x\_{2}$$

Das $x$ im mittleren Teil können wir ausklammern

$$0=x^{2}-\left(x\_{1}+x\_{2}\right)x+x\_{1}x\_{2}$$

Jetzt nutzen wir Vieta. Also folgt

$$0=x^{2}-\left(-p\right)x+q=x^{2}+px+q$$

Damit ist die Gleichheit der Darstellungen bewiesen.

# Literaturverzeichnis

Alten, H., Sander, J., Sonar, T., Djafari-Naini, A., Schmidt-Thieme, B., Wagner, E., . . . Wesemüller-Knock, H. (Hrsg.). (2014). *4000 Jahre Algebra.* Berlin: Springer Verlag.

Mäder, P. (1992). *Mathematik hat Geschichte.* Hannover: Metzler Schulbuchverlag.