**Handreichung zu „Exponentielles Wachstum“**

**Mathematisches Gebiet:** Funktionen

**Zielgruppe:** Gymnasium, Klasse 10

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Vorbereitung auf die BLF

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 1 „Wachstum und periodische Vorgänge“, Klasse 10
* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 3 „Funktionen und lineare Gleichungssysteme“, Klasse 8

**Inhalt:**

Das Material dient zur Wiederholung von exponentiellen Wachstumsprozessen anhand einer Sachaufgabe. Es wird in Einzelarbeit bearbeitet.

Die Schülerinnen und Schüler stellen gegebene Daten in einem Koordinatensystem dar und bestimmen anhand dessen, in welchem Intervall sich diese als exponentiell wachsend beschreiben lassen. Anschließend treffen sie begründete Aussagen darüber, ob eine gegebene Exponentialfunktion als Annäherung geeignet ist, und ermitteln nicht gegebene Werte mit dieser Funktion, welche sie ebenfalls anhand gegebener Daten als realistisch oder unrealistisch beurteilen. Schließlich führen sie selbst eine lineare Regression durch und beurteilen ebenfalls deren Eignung als Annäherung. Als Zusatzaufgabe ermitteln sie anhand dieser Regression den x-Wert zu einem gegebenen y-Wert.

In einer weiteren Zusatzaufgabe führen die Lernenden selbst eine exponentielle und eine logistische Regression mittels GTR durch und beurteilen diese wiederum danach, wie gut sie als Annäherung an gegebene Werte geeignet ist.

Bei diesem Material bietet es sich an einige Vorlagen zu laminieren um papiersparend zu arbeiten.

Als Abwandlungsmöglichkeiten können beispielsweise weniger Werte in der gegebenen Tabelle eingetragen werden oder die Lernenden können ihre Betrachtungen auf ein bestimmtes Zeitintervall beschränken. Dies reduziert den zeitlichen Aufwand.

Alternativ können die Schülerinnen und Schüler ebenfalls selbst eine Regression mittels CAS oder GTR für die Bevölkerungsentwicklung Leipzigs durchführen. Dies wird im Material nur als Zusatzaufgabe verlangt.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:** Die Schülerinnen und Schüler…

* …können ein geeignetes Koordinatensystem erstellen um entsprechende Werte einzutragen.
* …können einen exponentiellen Wachstumsprozess klassifizieren.
* …können eine gegebene Regression hinsichtlich der Qualität ihrer Annäherung beurteilen.
* …können Prognosen hinsichtlich der Bevölkerungsentwicklung anhand einer Regression treffen.

**Materialbedarf:**

1 Arbeitsblatt pro Schüler

**Medien:**

-

Material: Exponentielles Wachstum

Einzelarbeit, 25 min, Hilfsmittel: GTR

Querverweise: keine

**Exponentielles Wachstum: Leipzigs Bevölkerung**

1. Die Tabelle zeigt die Einwohnerzahlen Leipzigs seit Gründungsjahr (1165). Tragen Sie die Werte in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
2. Benennen Sie das Zeitintervall, in welchem sich ein exponentieller Bevölkerungsanstieg finden lässt.
3. Dieser exponentielle Anstieg lässt sich annähernd durch die Funktion

beschreiben. Begründen Sie mit geeigneten Werten, ob die Exponentialfunktion die tatsächliche Bevölkerungsentwicklung passend annähert.

1. Geben Sie die heutige Einwohnerzahl Leipzigs an, wenn es weiterhin einen exponentiellen Anstieg gäbe. Erläutern Sie, ob das Ergebnis realistisch ist.
2. Ermitteln Sie rechnerisch eine geeignete lineare Funktionsgleichung für das Bevölkerungswachstum seit 2011 (bis 2016).
3. Bestimmen Sie die zu erwartende Einwohnerzahl Leipzigs im Jahr 2020 mithilfe der Gleichung aus 5. Bewerten Sie Ihr Ergebnis.

|  |  |
| --- | --- |
| Jahr | Einwohner (Leipzig) |
| 2016 | 579.530 |
| 2015 | 560.472 |
| 2014 | 544.479 |
| 2013 | 531.562 |
| 2012 | 520.838 |
| 2011 | 510.043 |
| 2010 | 522.883 |
| 2005 | 502.651 |
| 2000 | 493.208 |
| 1980 | 562.480 |
| 1960 | 589.632 |
| 1940 | 709.100 |
| 1920 | 620.000 |
| 1900 | 456.124 |
| 1880 | 149.081 |
| 1861 | 78.495 |
| 1843 | 54.519 |
| 1819 | 36.093 |
| 1800 | 32.146 |
| 1750 | 35.000 |
| 1699 | 15.653 |
| 1648 | 14.000 |
| 1600 | 20.000 |
| 1554 | 7.883 |
| 1507 | 9.000 |
| 1466 | 6.000 |
| 1165 | 500 |

Quelle: leipzig-sachsen.de/leipzig-stadtchronik/statistik-einwohner.html

statistik.leipzig.de/statcity/table.aspx?cat=2&rub=1&obj=0 - 26.02.2017



Ermitteln Sie rechnerisch das Jahr, in dem Leipzig erstmals 500.000 Einwohner hatte.

Die Tabelle zeigt die Entwicklung der Weltbevölkerung seit 1750 inklusive Prognosen bis ins Jahr 2100. Führen Sie eine exponentielle und eine logistische Regression mittels Ihres Taschenrechners durch. Vergleichen Sie die aufgestellten Funktionen miteinander und beurteilen Sie diese hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten.

|  |  |
| --- | --- |
| Jahr | Einwohner in Milliarden (Welt) |
| 1750 | 0,79 |
| 1800 | 0,98 |
| 1850 | 1,26 |
| 1900 | 1,65 |
| 1950 | 2,53 |
| 2000 | 6,13 |
| 2010 | 6,93 |
| 2020 | 7,76 |
| 2030 | 8,5 |
| 2040 | 9,16 |
| 2050 | 9,73 |
| 2060 | 10,18 |
| 2070 | 10,61 |
| 2080 | 10,84 |
| 2090 | 11,06 |
| 2100 | 11,21 |

Quellen: de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/

de.statistika.com/statistik/daten/studie/1717/umfrage/prognose-zur-entwicklung-der-weltbevoelkerung/ - 26.02.2017

**Exponentielles Wachstum – Erwartungsbild**





1. Vom Jahr 1700 (dies ist lediglich ein Richtwert; liegt der Anfangswert des Intervalls zwischen 1600 und 1800, so kann dies als richtig gewertet werden) bis zum Jahr 1940 lässt sich ein exponentieller Bevölkerungsanstieg verzeichnen.

Die berechneten Werte weichen zu Beginn wenig von den realen Werten ab, im Jahr 1800 gab es beispielsweise in Leipzig 32.146 Einwohner. Der Funktionswert liegt bei 25.000 Einwohnern. Im Jahr 1843 gab es 54.519 Einwohner. Der errechnete Funktionswert liegt bei 75.384 Einwohnern, hier zeichnet sich also schon eine stärkere Abweichung ab. Später weichen die Werte noch weiter ab, im Jahr 1940 hatte Leipzig 709.100 Einwohner, der Funktionswert liegt jedoch bereits bei 909.014 Einwohnern. Insgesamt ist die Annäherung also nicht besonders passend, da zu starke Abweichungen vorliegen.



Das Ergebnis ist sehr unrealistisch. Über 6 Millionen Einwohner entsprechen fast das Doppelte der Einwohnerzahl Berlins (größte Stadt in Deutschland). Leipzig wäre flächenmäßig viel zu klein, um eine so hohe Einwohnerzahl zu haben. Auch versorgungstechnisch wäre dies nicht machbar.

1. Allgemeine Gleichung der linearen Funktion:

2 Punkte auswählen: A (2011|510.043), B (2016|579.530)

Es gilt:

Einsetzen von und in Funktionsgleichung:

→

Im Jahr 2020 sind etwa 634.312 Einwohner zu erwarten.

Argumentation in 2 Richtungen möglich:

Ergebnis realistisch, denn: Der Anstieg ist nicht zu stark, die letzten Jahre gab es bisher immer einen leichten Anstieg, demnach könnte das Wachstum so weiterverlaufen.

Ergebnis nicht einschätzbar, denn: Es gibt zu viele Einflussfaktoren (Wirtschaft, Mietpreise, Platz, Geburten-/Sterberate etc.), um bewerten zu können, ob sich der leichte Bevölkerungsanstieg so fortsetzt.

Aber: In der Bevölkerungsvorausschätzung gibt es 3 Prognose-Varianten: 2020 werden demnach in Leipzig zwischen 620.000 und 650.000 Menschen leben (http://www.leipzig.de/fileadmin/mediendatenbank/leipzig-de/Stadt/02.1\_Dez1\_Allgemeine\_Verwaltung/12\_Statistik\_und\_Wahlen/Stadtforschung/Bevoelkerungsvorausschaetzung\_2016.pdf - 26.02.2017).

Zusatzaufgaben:

1. Laut Tabelle müsste Leipzig das erste Mal zwischen 1900 und 1920 500.000 Einwohner gehabt haben. Das heißt, es kann zur Berechnung die Exponentialfunktion verwendet werden.

|  |  |

Im Jahr 1916 hatte Leipzig erstmals 500.000 Einwohner.

2. Werte in den Taschenrechner eintragen

Regression → exp

oder:

Regression → lgst

Vergleich:

steigt zunächst (bis zum Jahr 1955) etwas stärker als an. Etwa bei überschneiden sich die Graphen. Nun steigt etwas stärker an als bis die Graphen sich bei erneut schneiden. Den weiteren Verlauf steigt stark an während sich einem Wert () nähert.

Beide Funktionen liefern zunächst eine relativ gute Annäherung (hier muss man beachten, dass ein großer Zeitraum betrachtet wird, wodurch eine sehr genaue Annäherung nur bedingt möglich ist). Im Jahr 2100 soll es laut Schätzungen 11,21 Milliarden Menschen auf der Welt geben. Nach der Annäherung von gäbe es in diesem Jahr bereits 14,14 Milliarden Menschen, nach gäbe es 11,55 Milliarden Menschen. Hier sieht man, dass bereits deutlich bessere Werte liefert als . Betrachtet man die darauffolgenden Jahre so zeigt sich, dass immer stärker ansteigt und im Jahr 2500 bereits eine Einwohnerzahl von etwa 490 Milliarden Menschen anzeigt. hingegen nähert sich an einen maximalen Wert an, so würden nach dieser Gleichung im Jahr 2500 etwa 17,38 Milliarden Menschen auf der Erde leben.

Insgesamt eignet sich die Exponentialfunktion nur bedingt zum Annähern des Bevölkerungswachstums der Erde. Insgesamt können hier Prozesse beschrieben werden, deren Wachstumsmöglichkeiten unbegrenzt sind. Das Bevölkerungswachstum kann nicht unendlich steigen, da der Lebensraum auf der Erde begrenzt ist. Hier ist also das logistische Wachstum sinnvoller. Es ist auch in der Wirklichkeit zu erwarten, dass sich die Anzahl der Menschen einem Wert annähert.

Möchte man also weitläufige Prognosen zur Bevölkerungsentwicklung treffen, so erscheint die Annäherung mit dem logistischen Wachstum sinnvoller.

Für kurze Entwicklungen von beispielsweise Städten und für eingegrenzte Zeiträume könnte das exponentielle Wachstum genutzt werden.