**Handreichung zu „Extrema und Monotonie“**

**Mathematisches Gebiet:** Funktionen

**Zielgruppe:** Gymnasium, Klasse 10

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Vorbereitung auf die BLF

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 3 „Funktionen und lineare Gleichungssysteme“, Klasse 8
* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 1 „Funktionen und Potenzen“, Klasse 9

**Inhalt:**

Dieses Material dient zur Wiederholung von Extrema von Funktionen, insbesondere der Umwandlung in Scheitelpunkt zur einfacheren Bestimmung dieser, sowie der Wiederholung des Monotonieverhaltens von Funktionen. Es wird in Einzelarbeit bearbeitet.

Die Schülerinnen und Schüler benennen zunächst die Maximalanzahl von Extrema bei linearen, quadratischen und kubischen Funktionen. Anschließend bestimmen sie anhand der Funktionsgleichung, gegebenenfalls unter vorheriger Umwandlung in Scheitelpunktform, die Extrempunkte von linearen, quadratischen und kubischen Funktionen. Abschließend beschreiben sie das Monotonieverhalten einer Parabel mit gegebenen Minimum.

Das Material umfasst eine Zusatzaufgabe. Hierbei beschreiben die Lernenden das Monotonieverhalten allgemeiner Funktionen ohne Extremstellen.

Bei diesem Material bietet es sich an einige Vorlagen zu laminieren um papiersparend zu arbeiten.

Als Abwandlungsmöglichkeit können die Funktionsgleichungen in Aufgabe 2 dem Niveau der Klasse angepasst werden. Somit ist es möglich einfachere und komplexere Gleichungen zu erstellen. Denkbar ist ebenso in Aufgabe 2 das Umwandeln der Gleichungen in die Scheitelpunktform intensiver zu thematisieren.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:** Die Schülerinnen und Schüler…

* …können Aussagen zu der Anzahl der Extrema verschiedener Funktionstypen treffen.
* …können Extrema benennen und klassifizieren, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Zusätzlich treffen sie Aussagen zum Monotonieverhalten.

**Materialbedarf:**

1 Arbeitsblatt pro Schüler

**Medien:**

-

Material: Extrema und Monotonie

Einzelarbeit, 25 min, Hilfsmittel: keine

Querverweise: keine

**Extrema und Monotonie**

1. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und vervollständigen Sie diese.

|  |  |
| --- | --- |
| Funktionstyp | Maximale Anzahl der Extrema |
| Lineare Funktion |  |
| Quadratische Funktion |  |
| Kubische Funktion |  |

1. Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen. Benennen Sie zusätzlich, ob es sich um Maxima oder Minima handelt. Treffen Sie anschließend Aussagen zum Monotonie-Verhalten der Funktionen.
2. $f\left(x\right) = x^{2} + 3$
3. $f\left(x\right) = x³$
4. $f\left(x\right) = -2x + 4$
5. $f\left(x\right) = -3x^{2} + 2x$

Hinweis: Formen Sie die Funktion bei d) in die Scheitelpunktform um.

1. Eine Parabel habe ein Minimum bei $(-3|7)$. Geben Sie an, für welche $x$ die Funktion monoton steigend und für welche $x$ sie monoton fallend ist.

Treffen Sie Aussagen zum Monotonie-Verhalten einer Funktion, die keine Extrema besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Extrema und Monotonie – Erwartungsbild**

1. Tabelle:

|  |  |
| --- | --- |
| Funktionstyp | Maximale Anzahl der Extrema |
| Lineare Funktion | 0 |
| Quadratische Funktion | 1 |
| Kubische Funktion | 2 |

1. Extrema und Monotonieverhalten:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Funktion | Lage des Maximums | Lage des Minimums | Monoton steigend für | Monoton fallend für |
| a) $f\left(x\right) = x^{2} + 3$ | - | $$T(0|3)$$ | $$x ⩾ 0$$ | $$x ⩽ 0$$ |
| b) $f\left(x\right) = x³$ | - | - | $$x \in R$$ | - |
| c) $f\left(x\right) = -2x + 4$ | - | - | - | $$x \in R$$ |
| d) $f\left(x\right) = -3x^{2} + 2x$ | $$H\left(\frac{1}{3}\right) $$ | - | $$x ⩽ \frac{1}{3}$$ | $$x ⩾ \frac{1}{3}$$ |

Umwandlung in die Scheitelpunktform von d):

Allgemeine Formel: $f\left(x\right) = x^{2} + p · x$ → $f\left(x\right) = x^{2} + p · x +\left(\frac{p}{2}\right)^{2}- \left(\frac{p}{2}\right)^{2}=\left(x + \frac{p}{2}\right)^{2}-\left(\frac{p}{2}\right)^{2}$,

in diesem Fall ist: $p = \frac{-2}{3}$ und somit $\frac{p}{2} = \frac{-1}{3}$

$ f\left(x\right) = -3x² + 2x = -3\left(x² - \frac{2}{3}x\right) = -3\left[x² - \frac{2}{3}x +\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}- \left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\right]= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^{2}- \left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\right]$
$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^{2}+3 · \left(\frac{-1}{3}\right)^{2}= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^{2}+ 3 · \frac{1}{9}$ $= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^{2}+ \frac{1}{3}$

1. Die Parabel ist für $x ⩽ -3$ monoton fallend und für $x ⩾ -3$ monoton steigend.

Zusatzaufgabe:

Für diese Funktion gilt, dass die Monotonie immer gleich ist, weil ein Monotoniewechsel ein Extremum mit sich bringen würde.