**Handreichung zu „Punktprobe und Einfluss von Parametern“**

**Mathematisches Gebiet:** Funktionen

**Zielgruppe:** Gymnasium, Klasse 10

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Vorbereitung auf die BLF

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 3 „Funktionen und lineare Gleichungssysteme“, Klasse 8
* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 1 „Funktionen und Potenzen“, Klasse 9
* Behandlung der entsprechenden Lehrplaninhalte aus Lernbereich 1 „Wachstum und periodische Vorgänge“ und Lernbereich 4 „Funktionale Zusammenhänge“, Klasse 10

**Inhalt:**

Das Arbeitsblatt wiederholt Punktproben zur Bestimmung von Punkten, die auf dem Funktionsgraphen liegen, sowie den Einfluss von Parametern auf allgemeine Funktionsgleichungen und die Eigenschaften bestimmter Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften bezüglich der Parameter. Es wird in Einzelarbeit bearbeitet.

Die Schülerinnen und Schüler führen zunächst eine Punktprobe für eine kubische Funktion durch. Anschließend berechnen sie im Rahmen einer Sachaufgabe Nullstellen und Punkte einer vorgegebenen Funktion. Sie bestimmen fehlende Punktkoordinaten zu gegebenen Funktionen und umgekehrt vervollständigen sie Funktionsgleichungen anhand gegebener Punkte. Weiterhin benennen sie den allgemeinen Einfluss ausgewählter Parameter auf Funktionsgraphen. Dazu wählen sie aus gegebenen Antwortmöglichkeiten aus. Die Lernenden verifizieren oder falsifizieren Aussagen über Punkte und Eigenschaften von gegebenen Funktionen. Abschließend ordnen sie einer beschriebenen Veränderung eines Funktionsgraphen die passende Funktionsgleichung zu.

Das Material umfasst eine Zusatzaufgabe zur Bestimmung von Parametern einer quadratischen Funktion, deren Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt.

Bei diesem Material bietet es sich an einige Vorlagen zu laminieren um papiersparend zu arbeiten.

Als Abwandlungsmöglichkeit ist es denkbar einige Aufgaben gezielt auszusuchen und die anderen zu vernachlässigen, da das Material sehr umfangreich ist und unterschiedliche Aufgabentypen und Zugänge zur Thematik abgeht. So kann Zeit eingespart werden.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:** Die Schülerinnen und Schüler …

* …können überprüfen, ob gegebene Punkte auf dem Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion liegen.
* …können eine Koordinate eines Punktes bei gegebener anderer Koordinaten so bestimmen, dass der Punkt auf dem Funktionsgraphen liegt.
* …können durch Einsetzen gegebener Punkte Parameter einer gegebenen Funktion bestimmen.
* …können den Einfluss von Parametern auf eine Funktion (, ,) erklären.

**Materialbedarf:**

1 Arbeitsblatt pro Schüler

**Medien:**

-

Material: Punktprobe und Einfluss von Parametern

Einzelarbeit, 30 min, Hilfsmittel: GTR

Querverweise: M5 als Voraussetzung

**Punktprobe und Einfluss von Parametern**

1. Gegeben sei die Funktion . Weisen Sie nach, ob der Punkt auf dem Graphen der Funktion liegt.
2. Die Flugbahn eines Fußballs, der vom Boden aus gespielt wird, kann mit der Gleichung (Einheit in Meter) beschrieben werden.
3. Berechnen Sie die Flugweite des Balls.
4. Geben Sie an, wie viele Meter der Fußballer beim Abschuss vom Tor entfernt war, wenn er die Unterkante der Querlatte trifft, die sich 2,44m über dem Boden befindet.
5. Gegeben Sei die Funktion .
6. Der Punkt liegt auf dem Graphen von . Ermitteln Sie .
7. Der Graph der Funktion mit = schneidet die x-Achse an der Stelle . Bestimmen Sie den Wert von .
8. Bestimmen Sie den Parameter so, dass der Punkt auf dem Graphen der Funktion liegt.
9. Eine Funktion mit hat eine Nullstelle bei . Der Punkt liegt auf dem Graphen der Funktion. Ermitteln Sie und .
10. Erläutern Sie, wie sich die Parameter auf eine Funktion auswirken.
11. Multiplikation einer Funktion mit einem Parameter:
12. Mit
13. Mit
14. Mit
15. Addition einer Konstanten zu einer Funktion:
16. Mit
17. Mit
18. Addition einer Konstanten zu :
19. Mit
20. Mit
21. Gegeben sei die Parabel durch die Gleichung . Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen falsch ist.
22. Der Graph von schneidet die x-Achse an den Stellen und .
23. Der Scheitelpunkt liegt auf der Geraden .
24. Der Graph von verläuft durch den Punkt .
25. Der Graph von schneidet die y-Achse bei .
26. Die Parabel ist nach unten geöffnet.
27. Der Graph einer Funktion mit wird um den Faktor 2 gestreckt, um eine Einheit nach unten und um 3 Einheiten nach links verschoben. Wählen Sie aus, welche Funktionsgleichung den entstehenden Graphen beschreibt.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I |  | II |  | III |  |
| IV |  | V |  | VI |  |



Welche Bedingungen müssen die Parameter , in der Funktionsgleichung erfüllen, damit der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt

**Punktprobe und Einfluss von Parametern – Erwartungsbild**

1. Man setzt ein und erhält: → Punkt liegt auf dem Graphen der Funktionsgleichung.
2. Fußball
3. Da der Fußball vom Erdboden gespielt wird und auch dort landet, müssen wir den Abstand beider Nullstellen berechnen. Berechnung der Nullstellen:

 und

Abstand der Nullstellen:

Die Flugweite beträgt 40 Meter.

1. Der Ball trifft genau am Punkt die Querlatte des Tores. Da die Flugbahn parabelförmig verläuft, hat der Ball genau zweimal die Höhe von 2,44 Metern: zum einen unmittelbar nach dem Abschuss, zum anderen unmittelbar vor dem Aufkommen.

Durch Einsetzen des Punktes in die Funktionsgleichung erhält man:

Es ergeben sich die Punkte und . Dabei ist die Abschussstelle genau 32,5m von entfernt. Der Fußballer trifft bei der parabelförmigen Flugbahn des Balls die Unterkante der Querlatte, wenn er 7,5m oder 32,5m vom Tor entfernt steht.

1. a) Man setzt und erhält:

Die Lösung dieser Gleichung ermittelt man mithilfe des CAS oder GTR. Es gibt nur eine reelle Lösung:

Der Punkt liegt auf dem Graphen von .

b) Berührt der Graph der Funktion mit die x-Achse an der Stelle , muss der Funktionswert an dieser Stelle sein. Das heißt, dass der Punkt zu dem Graphen der Funktion gehört. Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes N in die Funktionsgleichung von ermittelt man den Wert für :

Damit ist:

1. Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes erhält man:

Damit gilt für den Punkt :

1. Für die Funktion mit der Gleichung ist neben dem Punkt mit der Nullstelle der Punkt gegeben. Die Koordinaten beider Punkte müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

Es wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, was nach Auflösen die Werte für und liefert:

 einsetzen (I)

einsetzen (II)

Aus (I) folgt:

Einsetzen in (II) liefert:

Daraus folgt: und und somit ist:

1. a) I) Stauchung des Graphen

II) Streckung des Graphen

III) Spiegel des Graphen an der x-Achse

 b) I) Verschiebung des Graphen längs der y-Achse nach unten

II) Verschiebung des Graphen längs der y-Achse nach oben

 c) I) Verschiebung des Graphen längs der x-Achse nach rechts

II) Verschiebung des Graphen längs der x-Achse nach links

1. Aus der Scheitelpunktform der Funktionsgleichungergeben sich für den Graphen der Funktion folgende Eigenschaften:
	* + Parabel ist nach unten geöffnet
		+ Scheitelpunkt hat die Koordinaten und ist ein Hochpunkt.
		+ Die Nullstellen sind: ,

Daher sind Antworten a), b) und e) richtig.

Antwort c) ist richtig:

Antwort d) ist falsch: Mittels Einsetzen der Punktkoordinaten von lässt sich zeigen, dass die y-Achse nicht im Punkt schneidet:

1. Antwort II beschreibt den Graphen:

Eine Streckung des Graphen der Funktion mit längs der y-Achse mit dem Faktor 2 erreicht man durch eine Verdopplung der Funktionswerte, also . Eine Verschiebung des Graphen der Funktion f mit längs der x-Achse um 3 Einheiten nach links erreicht man durch eine Vergrößerung der Argumente, also . Eine Verschiebung des Graphen der Funktion mit längs der y-Achse nach unten erhält man durch Verringern des Funktionswertes, also . Zusammen ergibt das .

Zusatzaufgabe:

Zunächst sollte die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform umgewandelt werden, um die Bedingungen besser ablesen zu können. Mittels der Quadratischen Ergänzung erhalten wir

lässt sich als erste binomische Formel schreiben, so dass man

 erhält.

Die Auswirkungen der Parameter auf den Funktionsgraphen lassen sich nun besser untersuchen. Damit der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt, muss die y-Koordinate null sein, also . Der grün markierte Ausdruck bewirkt eine Verschiebung längs der x-Achse, da es jedoch die y-Koordinate des Scheitelpunktes nicht verändert, können wir den Ausdruck unbeachtet lassen. Der rote Ausdruck hingegen bewirkt eine Verschiebung des Graphen längs der y-Achse. Da der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegen soll, muss dieser Ausdruck null sein und das stellt die Bedingung der p- und q-Parameter dar:
 bzw. .