**Handreichung zum Arbeitsblatt: „Heron-Verfahren“**

**Mathematisches Gebiet:** Quadratische Gleichungen

**Zielgruppe:** Gymnasium, Klasse 9

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Erarbeitung und Übung Quadratische Gleichungen

(Gymnasium: LB 1 „Funktionen und Potenzen“)

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Kenntnisse zur Quadratwurzel
* Umgang mit geometrischen Figuren
* Kenntnisse zum Durchschnitt

**Inhalt:**

Das Material dient der Einführung in das Heron-Verfahren zum Lösen von Quadratwurzeln und als Übung. Schülerinnen und Schüler lernen des Heron-Verfahrens anhand ausführlicher Erklärungen und einer Beispielaufgabe kennen, üben das Verfahren mit Hilfe eines Lückentexts und führen das komplette Verfahren als Zusatzaufgabe eigenständig durch.

Das Material ist eingebunden in ein Gruppenpuzzle zum Aufgabenpool „Übungen zum historischen Lösen Quadratischer Gleichungen“, es kann aber auch einzeln bearbeitet werden. Es beinhaltet Aufgaben, Erwartungshorizont und ist mit Ergänzung des Ergebniszettels gut auszuwerten. Zusätzlich beinhaltet es Zusatzaufgaben und Hilfestellungen in Form von Briefumschlägen am Stationstisch.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* Die Schülerinnen und Schüler vertiefen ihr Verständnis der Quadratwurzel mit Hilfe des Heron-Verfahrens.
* Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage Quadratwurzeln mittels Heron-Verfahrens zu berechnen.

**Materialbedarf:**

* Kopien der Arbeitsblätter, Laufzettel des Aufgabenpools
* Taschenrechner

**Benötigte Medien:**

* Laptop mit Beamer (nur nötig zur Ein- und Ausführung des Aufgabenpools)

**Zeitbedarf:**

* 30-45 Minuten

# Das Heron-Verfahren

## Heron von Alexandria

Heron von Alexandria lebte im ersten Jahrhundert nach Christus und war Mechaniker und Mathematiker. Er entwickelte mehrere Apparate, unter anderem eine windbetriebene Orgel. In der Mathematik wurde er durch das Heron-Verfahren bekannt.

## Die Idee hinter dem Verfahren

***Lest*** *euch den folgenden Text sorgfältig durch und* ***markiert*** *die wesentlichen Schritte.*

Das Heron-Verfahren ist ein geometrisches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel, welches auf geometrischen Überlegungen basiert. Dabei betrachtet man als geometrische Figur das Quadrat.

Aber welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Quadratwurzel und dem Quadrat?

Dazu stellen wir uns die Frage: Wie kann die Seitenlänge eines Quadrates aus dem Flächeninhalt berechnet werden?

AQ

* Die Seitenlänge des Quadrats kann mit \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ beschrieben werden.

Also ist

Woraus folgt, dass

Wir wissen somit:

Dividiert man den Flächeninhalt durch die Seitenlänge eines Quadrates, ergibt sich die zweite Seite mit gleicher Länge. Bei dieser Überlegung setzt Heron mit seinem Verfahren an. Bei Flächeninhalten wie oder ist das einfach:

Aber was ist mit ?

## Die Durchführung des Heron-Verfahrens

Wir haben das Quadrat mit dem Flächeninhalt gegeben.

Damit ist die Seitenlänge .

Heron überlegte sich, dass man sich das Quadrat nach und nach formen kann, indem man es über ein Rechteck annähert.

Dazu wählen wir eine Seite beliebig und berechnen mit der Formel die zweite Seite.

Sind dabei beide Seiten unterschiedlich lang, wissen wir, dass wir ein Rechteck haben und kein Quadrat. Deshalb nehmen wir den Durchschnitt beider Seiten, wählen diesen als neue Seitenlänge und berechnen daraus wieder die Länge der zweiten Seite.

Dies wiederholen wir bis die Seitenlängen des Rechtecks gleich sind, d.h. bis es ein Quadrat ist.

Wie wählen wir die erste Seitenlänge?

Wir wissen:

Außerdem liegt 28 näher an 25. Deshalb nehmen wir an:

Wir nehmen als beliebige Seitenlänge .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a, b) in cm  |
| 1 | 5,5 | 5,09090909 | 5,29545455 |
| 2 | 5,29545455 | 5,28755365 | 5,2915041 |
| 3 | 5,2915041 | 5,29150115 | 5,29150262 |
| 4 | **5,29150262** | **5,29150262** |  |

Bei ist das Rechteck auch ein Quadrat. Somit ist

***Überprüft*** *das Ergebnis doch mal mit dem Taschenrechner.*

Beachte: Da während der Rechnung gerundet wird, handelt es sich um eine Annäherung der gesuchten Wurzel.

## Aufgabe

***Berechnet*** *nun .*

Nutzt für die Berechnungen der Seitenlänge b und des Durchschnittes den Taschenrechner. Rundet auf acht Stellen hinter dem Komma und schreibt die Zahlen als Dezimalzahlen.

Überlegungen zur ersten Seitenlänge:

43 liegt näher an \_\_\_. Deshalb nehmen wir an:

Wir nehmen als beliebige Seitenlänge .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a,b) in cm  |
| 1 | 6,75 | 6,37037037 | 6,56018519 |
| 2 | 6,56018519 |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

Also ist unsere gesuchte Wurzel ungefähr:

## Zusatzaufgabe

***Berechnet*** *.*

Überlegungen zur ersten Seitenlänge:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

17 liegt näher an \_\_\_. Deshalb nehmen wir an:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Wir nehmen als beliebige Seitenlänge .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a,b) in cm  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |

Also ist unsere gesuchte Wurzel ungefähr:

## Hilfestellungen / Lösungen

Diese Hilfezettel / Lösungen sind als Überprüfung der eigenen Lösungen gedacht, sodass die Lernenden ohne Fehler in den Aufzeichnungen weiterarbeiten können ohne dabei die Lehrkraft befragen zu müssen.

Zur Idee hinter dem Verfahren:

Die Seitenlänge des Quadrats kann mit
beschrieben werden.

Stellt man fest, dass kleiner als ist, so folgt, dass die beliebige Startseitenlänge von a zu klein gewählt wurde.

Zur Aufgabe:

Zur Zusatzaufgabe:

# Erwartungsbild

## Die Idee hinter dem Verfahren

AQ

?

* Die Seitenlänge des Quadrats kann mit beschrieben werden.

## Aufgabe

***Berechnet*** *nun .*

Nutzt für die Berechnungen der Seitenlänge b und des Durchschnittes den Taschenrechner. Rundet auf acht Stellen hinter dem Komma und schreibt die Zahlen als Dezimalzahlen.

Überlegungen zur ersten Seitenlänge:

43 liegt näher an 49. Deshalb nehmen wir an:

Wir nehmen als beliebige Seitenlänge .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a,b) in cm  |
| 1 | 6,75 | 6,37037037 | 6,56018519 |
| 2 | 6,56018519 | 6,55469301 | 6,5574391 |
| 3 | 6,5574391 | 6,55743795 | 6,55743852 |
| 4 | **6,55743852** | **6,55743852** |  |

Also ist unsere gesuchte Wurzel ungefähr:

## Zusatzaufgabe

***Berechnet*** *.*

Überlegungen zur ersten Seitenlänge:

17 liegt näher an 16. Deshalb nehmen wir an:

Wir nehmen als beliebige Seitenlänge .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a,b) in cm  |
| 1 | 4,25 | 2,58823529 | 3,41911765 |
| 2 | 3,41911765 | 4,97204301 | 4,19558033 |
| 3 | 4,19558033 | 4,05188285 | 4,12373159 |
| 4 | 4,12373159 | 4,12247975 | 4,12310567 |
| 5 | 4,12310567 | 4,12310558 | 4,12310563 |
| 6 | **4,12310563** | **4,12310563** |  |

## Laufzettelteil

Das Heron-Verfahren ist ein geometrisches Verfahren zur Berechnung der

Quadratwurzel.

Es basiert auf der Überlegung, dass die Seitenlänge eines Quadrats durch die Wurzel des Flächeninhalts () zu berechnen ist. Man nähert sich dem Quadrat über ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt, der Formel und mehreren Annäherungsschritten an.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm  | Mittelwert (a,b) in cm  |
| 1 | 3,5 | 3,14285714 | 3,32142857 |
| 2 | 3,32142857 | 5,11827957 | 4,21985407 |
| 3 | 4,21985407 | 4,02857533 | 4,1242147 |
| 4 | 4,1242147 | 4,12199685 | 4,12310577 |
| 5 | 4,12310577 | 4,12310548 | 4,12310563 |
| 6 | **4,12310563** | **4,12310563** |  |

Beispiel: *Berechnung von mittels des Heron-Verfahrens*

# Literaturverzeichnis

*Lernhelfer*. (2010). (Bibliographisches Institut GmbH) Abgerufen am 07. Juli 2018 von https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/heron-verfahren