# Ergebniszettel – Das Problem von Schorschi

„Die quadratische Grundform möge um die Zahl meiner Dynastie erweitert werden, auf dass der Grund die Zahl $7$, unsere heilige Zahl, repräsentiere.“

Recherche ergab, dass Schorschi damit folgende, von euch zu lösende Gleichung meint:

$$x^{2}+4x=7$$

## Die erste Lösung geometrisch finden – Al-Khwarizmi

Einer der wichtigsten Mathematiker, der zum Lösen quadratischer Gleichungen beitrug, war Muhammad Ibn Musa \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (von 787 bis rund um 850). In seinem Buch„\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_“ befasst er sich unteranderem mit dem Lösen quadratischer Gleichungen. Man findet vor allem viele Regeln zum formalen Lösen von Gleichungen.

Die Gleichung $x^{2}+4x=7$ löste al-Khwarizmi geometrisch wie folgt:



***Beschriftet*** *die Abbildung und* ***entwickelt*** *mit dieser Abbildung eine Lösung der Gleichung.*

## Die Wurzel annähern – Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren ist ein geometrisches Verfahren zur Berechnung der \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_. Es basiert auf der Überlegung, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ eines Quadrats durch die Wurzel des Flächeninhalts ($a=\sqrt{A\_{Q}} $) zu berechnen ist. Man nähert sich dem Quadrat über \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ mit gleichem Flächeninhalt, der Formel $\frac{A\_{Q}}{a}$ und mehreren Annäherungsschritten an.

***Füllt*** *die verbliebenen Lücken und* ***berechnet***$\sqrt{11}$ *mittels des Heron-Verfahrens.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm $(\frac{A\_{Q}}{a})$ | Mittelwert (a,b) in cm $(\frac{a+b}{2})$ |
| 1 | 3,5 | 3,14285714 | 3,32142857 |
| 2 | 3,32142857 | 5,11827957 | 4,21985407 |
| 3 | 4,21985407 | 4,02857533 | 4,1242147 |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |

 $ \sqrt{11}≈$

## Die zweite Lösung finden – Der Wurzelsatz von Vieta

Der Wurzelsatz von Vieta macht eine Aussage über die Beziehung zwischen \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ einer (quadratischen) Gleichung in \_\_\_\_\_\_\_\_\_-form. Er lautet:

Gegeben sei die quadratische Gleichung in Normalform:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

sowie deren Lösungen $x\_{1}$ und $x\_{2}$. Dann gilt:

$p= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$ und $q= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

***Berechnet*** *mit Vieta die zweite Lösung des Pyramidenproblems.*

## Überprüfung – Stifels Lösungsverfahren

***Überprüft*** *die Ergebnisse von* $x^{2}+4x=7$ *mit dem Vorgehen von Michael Stifel:*

Zuerst wird das \_\_\_\_\_\_\_\_\_ halbiert 🡪 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Dieses Ergebnis wird mit \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ multipliziert 🡪 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Das Absolutglied wird hiervon \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ oder \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, je nach \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 🡪 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Aus dem Resultat muss nun die \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ gefunden werden 🡪 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Jetzt wird noch das \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Linearglied (abhängig von seinem Vorzeichen) addiert oder subtrahiert. 🡪 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_. Eine zweite Lösung entsteht, wenn man das Vorzeichen der Wurzel umkehrt. Das Ergebnis ist dann \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_bzw.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .

## Zusammenhang mit der p/q-Formel

***Vergleicht*** die historischen Lösungsverfahren mit der p/q-Formel. Wo kannst du sie erkennen?

# Erwartungsbild

## Die erste Lösung geometrisch finden – Al-Khwarizmi

Einer der wichtigsten Mathematiker, der zum Lösen quadratischer Gleichungen beitrug, war Muhammad Ibn Musa al- Khwarizmi (von 787 bis rund um 850). In seinem Buch „Ein kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“ befasst er sich unteranderem mit dem Lösen quadratischer Gleichungen.

Die Gleichung $x^{2}+4x=7$ löste al-Khwarizmi geometrisch wie folgt:

***Beschriftet*** *die Abbildung und* ***entwickelt*** *mit dieser Abbildung eine Lösung der Gleichung.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | $$x^{2}+4x=7$$ |
|  | $$x^{2}+2x+2x=7$$ |
|  | $$x^{2}+2x+2x+4=7+4 $$$$ \left(x+2\right)^{2}=11$$$$x+2=\sqrt{11}$$$$x\_{1}=\sqrt{11}-2$$ |

## Die Wurzel annähern – Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren ist ein geometrisches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel. Es basiert auf der Überlegung, dass die Seitenlänge eines Quadrats durch die Wurzel des Flächeninhalts ($a=\sqrt{A\_{Q}} $) zu berechnen ist. Man nähert sich dem Quadrat über ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt, der Formel $\frac{A\_{Q}}{a}$ und mehreren Annäherungsschritten an.

***Füllt*** *die verbliebenen Lücken und* ***berechnet***$\sqrt{11}$ *mittels des Heron-Verfahrens.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Schritt | Seitenlänge a in cm | Seitenlänge b in cm $(\frac{A\_{Q}}{a})$ | Mittelwert (a,b) in cm $(\frac{a+b}{2})$ |
| 1 | 3,5 | 3,14285714 | 3,32142857 |
| 2 | 3,32142857 | 5,11827957 | 4,21985407 |
| 3 | 4,21985407 | 4,02857533 | 4,1242147 |
| 4 | 4,1242147 | 4,12199685 | 4,12310577 |
| 5 | 4,12310577 | 4,12310548 | 4,12310563 |
| 6 | **4,12310563** | **4,12310563** |  |

$$\sqrt{11}≈4,12310563$$

## Die zweite Lösung finden – Der Wurzelsatz von Vieta

Der Wurzelsatz von Vieta macht eine Aussage über die Beziehung zwischen Koeffizienten und Lösungen einer (quadratischen) Gleichung in Normalform. Er lautet:

Gegeben sei die quadratische Gleichung in Normalform:

$$x^{2}+px+q=0$$

sowie deren Lösungen $x\_{1}$ und $x\_{2}$. Dann gilt:

$$p= -x\_{1}-x\_{2}$$

$$q= x\_{1}⋅x\_{2}$$

***Berechnet*** *mit Vieta die zweite Lösung des Pyramidenproblems.*

$$4=-\sqrt{11}+2-x\_{2} x\_{2}=-\sqrt{11}-2$$

## Überprüfung – Stifels Lösungsverfahren

***Überprüft*** *die Ergebnisse von* $x^{2}+4x=7$ *mit dem Vorgehen von Michael Stifel:*

 Zuerst wird das Linearglied halbiert 🡪 2

 Dieses Ergebnis wird mit sich selbst multipliziert 🡪 4

Das Absolutglied wird hiervon addiert oder subtrahiert, je nach Vorzeichen 🡪 11

Aus dem Resultat muss nun die Quadratwurzel gefunden werden 🡪 $\sqrt{11}$

Jetzt wird noch das halbierte Linearglied abhängig von seinem Vorzeichen addiert oder subtrahiert. 🡪 $\sqrt{11}-2$

Eine zweite Lösung entsteht, wenn man das Vorzeichen der Wurzel umkehrt.

Das Ergebnis ist dann $\sqrt{11}-2$ bzw. $-\sqrt{11}-2$.

## Zusammenhang mit der p/q-Formel

***Vergleicht*** die historischen Lösungsverfahren mit der p/q-Formel. Wo kannst du sie erkennen?

Mögliche Nennungen:

Man kann die p/q-Formel in der Lösungsverfahren von den Babyloniern und von Stifel direkt wiederfinden.

Das Lösungsverfahren von al-Khwarizmi verlangt die quadratische Ergänzung und zeigt eine geometrische Lösung von quadratischen Gleichungen auf.

Der Wurzelsatz von Vieta zeigt die Eindeutigkeit der Lösung und Koeffizienten auf.

Das Heronverfahren ist ein Verfahren zur Wurzelberechnung. Man erkennt, dass auch früher, als es noch keinen Taschenrechner gab, die Menschen mit schwierigen Wurzelausdrücken gerechnet haben und dazu Lösungsverfahren entwickelt wurden.

Insgesamt zeigt das Material, dass die p/q-Formel eine historisch gewachsene mathematische Lösungsformel ist.