**Handreichung zum Material:**

**Differenzierte Übungsblätter „Die Hundertertafel – Ein magisches Quadrat“**

**Mathematisches Gebiet:** Symmetrie

**Zielgruppe:** Gymnasium Klasse 5, Oberschule Klasse 5

**Vorgeschlagener Einsatzzeitraum:**

Gymnasium: im Rahmen von LB 2 „Lagebeziehungen geometrischer Objekte“

Oberschule: im Rahmen von LB 4 „Symmetrie und deckungsgleiche Formen“

**Vorausgesetzte Kenntnisse und Fähigkeiten:**

* sichere Verwendung der Grundrechenarten für natürliche Zahlen
* Zerlegung einer Zahl in Zehner und Einer
* gefestigte Kenntnisse von und sicherer Umgang mit Dreh- und Spiegelsymmetrie (umfasst u.a. die Begriffe Punktsymmetrie, Spiegelsymmetrie, Summe, Drehung um einen festen Winkel)

**Inhalt:**

Das Arbeitsblatt kann im Anschluss an die Behandlung von Dreh- und Spiegelsymmetrie verwendet werden und dient zur Erarbeitung spezifischer Zahlbeziehungen auf der Hundertertafel durch die Anwendung der Kenntnisse zur Dreh- und Spiegelsymmetrie. Je nach Unterrichtssituation kann es in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit bearbeitet werden.

Es existieren zwei Versionen des Arbeitsblattes, die sich in ihrer Schwierigkeit unterscheiden und somit eine Differenzierungsmöglichkeit im Unterricht darstellen.

In beiden Versionen des Arbeitsblattes dienen die ersten vier Aufgaben zur Erarbeitung von Grundlagen der Summenbildung mit der Hundertertafel unter Verwendung dreh- und spiegelsymmetrischer Schablonen mit fünf Feldern. Hierbei erkennen sie, dass sich die Summe durch Drehung der Schablone um 90° bzw. 180° und auch durch Wechsel der Schablone nicht ändert. Im Gegensatz dazu zeigt sich, dass sich bei Schablonen, die nicht dreh- oder spiegelsymmetrisch sind, die Summe der Zahlen unterscheidet und sich auch bei Drehung verändert. Insbesondere erkennen die Lernenden, welche Formen sich eignen, um, trotz Drehung, gleiche Summen zu erzeugen. Ausgehend davon finden sie weitere solcher Formen. Abschließend betrachten die Schülerinnen und Schüler Veränderungen der Summe, die sich durch Verschiebung der Schablone auf der Tafel ergeben. Unter Umständen ist hier Hilfestellung durch die Lehrkraft erforderlich für Lernende, die Verständnisprobleme mit dem der Hundertertafel zugrundeliegenden Rechensystem haben.

Die etwas anspruchsvollere, zweite Variante des Arbeitsblattes ist analog aufgebaut, aber enthält neben einer größeren Anzahl an Aufgaben auch mehr Arbeitsaufträge mit den Schwerpunkten Begründung und Abstraktion. Damit ist es eher für leistungsstärkere Lernende geeignet.

**Zu erlernende Kenntnisse und Fähigkeiten:** Die Schülerinnen und Schüler…

* …können Summen über Schablonen auf der Hundertertafel bilden, diese Vergleichen und die Gleichheit oder Ungleichheit der Summen verschiedener Schablonen und unter Drehung auf die Symmetrieeigenschaften dieser Schablonen zurückführen.
* …können ausgehend von ihren Überlegen weitere Schablonen entwickeln, die die gleiche Summe erzeugen.
* …können beschreiben, wie sich eine konkrete Summe verändert, wenn eine Schablone auf der Hundertertafel verschoben wird.

Zusätzlich in zweiter Variante:

* …können Aussagen bezüglich der Summenbildung auf der Hundertertafel überprüfen und mit entsprechenden Beispielen belegen.
* … können beschreiben, wie sich eine Summe im Allgemeinen verändert, wenn eine Schablone auf der Hundertertafel verschoben wird.

**Materialbedarf:**

1 Arbeitsblatt pro Schüler

Schere

evtl. Geodreieck

Die Hundertertafel – Ein magisches Quadrat

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

1. Schneide beide Schablonen aus.
2. Nimm Schablone 1 und lege sie auf die Hundertertafel. Notiere dir die Zahlen, auf denen die Schablone liegt und deren Summe.
3. Drehe die Schablone nun einmal um 90° und einmal um 180° um die grüne Fläche. Notiere dir auch hier die Zahlen, auf denen die Schablone liegt und deren Summe. Notiere deine Beobachtung
4. Lege Schablone 2 auf die Tafel. Die grün markierten Felder müssen dabei übereinstimmen. Addiere wieder alle Zahlen auf denen die Schablone liegt. Vergleiche mit Aufgabe 2.
5. Nimm nun Schablone 3 und lege das grüne Feld wieder auf die gleiche Zahl. Gehe danach vor wie bei Aufgabe 1. Beschreibe, was du beobachtest.
6. Finde mit Hilfe deiner Überlegungen von Aufgabe 5 Formen für weitere Schablonen, die man für Aufgabe 2 und 4 einsetzen könnte.
7. Verschiebe eine Schablone deiner Wahl:
	1. zwei Zeilen nach oben/unten
	2. zwei Spalten nach rechts/links
	3. zwei Zeilen nach unten und eine Spalte nach rechts.

Notiere dir die Zahlen, auf denen die Schablone jeweils liegt. Addiere sie und gib eventuelle Unterschiede zwischen den Summen an. Erkläre, wie das Verschieben der Schablone die Summe verändert.

**Schablonen**

Schablone 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Schablone 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Schablone 3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Die Hundertertafel – Ein magisches Quadrat – Erwartungsbild

1. Individuelle Lösung. Beispiel: Grünes Feld liegt auf der 35. Summe:

24 + 25 + 35 + 45 + 46 = 175

1. Die grüne Fläche lag bei Aufgabe 2 auf der Zahl 35, demnach ergibt sich durch Drehung um 90°: 44 + 34 + 35 + 36 + 26 = 175. Bei Drehung um 180° ergeben sich die gleichen Summanden wie in Aufgabe 2. Es fällt auf, dass die Summen bei beiden Drehungen konstant bleiben.
2. Liegt die grüne Fläche wieder auf der 35, ergibt sich 34 + 35 + 36 + 45 + 25 = 175. Beim Vergleich mit Aufgabe 2 fällt auf, dass die Summe konstant bleibt.
3. Liegt die grüne Fläche wieder auf der 35, ergibt sich die Summe

24 + 34 + 35 + 36 + 45 = 174.

Bei der Drehung um 90° ergibt sich: 25 + 35 + 36 + 44 + 45 = 185.

Bei der Drehung um 180° ergibt sich: 25 + 34 + 35 + 36 + 46 = 176

Bei jeder Drehung erhält man ein anderes Ergebnis. Dies legt die Vermutung nahe, dass nur bei symmetrischen Schablonen gleiche Summen entstehen.

1. Ein weiteres Beispiel wäre folgende Figur:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

1. Beispiel: Schablone 1 wird von 35 aus verschoben
2. Verschieben nach oben verringert die Summe um 100 (10 · 10). Verschieben nach unten erhöht die Summe um 100 (10 · 10).

Man erhält 4 + 5 + 15 + 25 + 26 = 75 bzw. 44 + 45 + 55 + 65 + 66 = 275.

1. Verschieben nach links verringert die Summe um 10 (5+5) und Verschieben nach rechts erhöht sie um 10.

Man erhält 22 + 23 + 33 + 43 + 44 = 165 bzw. 26 + 27 + 37 + 47 + 48 = 185

1. Verschieben nach unten erhöht die Summe um 100 und Verschieben nach rechts erhöht sie nochmals um 5. Somit erhöht sich die Summe insgesamt um 105.

Man erhält: 45 + 46 + 56 + 66 + 67 = 280.

Die Hundertertafel – Ein magisches Quadrat \*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

1. Schneide beide Schablonen aus.
2. Nimm Schablone 1 und lege sie auf die Hundertertafel. Notiere dir die Zahlen, auf denen die Schablone liegt und deren Summe.
3. Drehe die Schablone nun einmal um 90° und einmal um 180° um die grüne Fläche. Notiere dir auch hier die Zahlen, auf denen die Schablone liegt und deren Summe. Notiere deine Beobachtung
4. Lege Schablone 2 auf die Tafel. Die grün markierten Felder müssen dabei übereinstimmen. Addiere wieder alle Zahlen auf denen die Schablone liegt. Vergleiche mit Aufgabe 2.
5. Nimm nun Schablone 3 und lege das grüne Feld wieder auf die gleiche Zahl. Gehe danach vor wie bei Aufgabe 1. Beschreibe, was du beobachtest.
6. Etienne behauptet, er habe eine Schablone ebenfalls aus 5 Quadraten gefunden, deren Summe 175 beträgt und anders aussieht als die Schablonen in Aufgabe 1 und 3. Überprüfe, ob Etienne Recht hat und gib, falls möglich, die Form dieser Schablone an.
7. Verschiebe eine Schablone deiner Wahl:
	1. zwei Zeilen nach oben/unten
	2. zwei Spalten nach rechts/links
	3. zwei Zeilen nach unten und eine Spalte nach rechts.

Notiere dir die Zahlen, auf denen die Schablone jeweils liegt. Addiere sie und gib eventuelle Unterschiede zwischen den Summen an. Erkläre, wie das Verschieben der Schablone die Summe verändert.

8. Finde mit Hilfe von Aufgabe 6 eine allgemeine Regel, wie sich die Summe bei Verschiebung einer Schablone ändert.

9. Lege Schablone 1 noch auf drei andere Stellen der Hundertertafel und bilde die jeweilige Summe. Achte dabei darauf, dass die grüne Fläche sowohl auf geraden als auch auf ungeraden Zahlen liegt. Vergleiche die Ergebnisse und beschreibe, was dir dabei auffällt. Versuche eine Begründung für deine Beobachtung zu finden.

**Schablonen**

Schablone 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Schablone 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Schablone 3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Die Hundertertafel – Ein magisches Quadrat – Erwartungsbild

1. Individuelle Lösung. Beispiel: Grünes Feld liegt auf der 35. Summe:

24 + 25 + 35 + 45 + 46 = 175

1. Die grüne Fläche lag bei Aufgabe 2 auf der Zahl 35, demnach ergibt sich durch Drehung um 90°: 44 + 34 + 35 + 36 + 26 = 175. Bei Drehung um 180° ergeben sich die gleichen Summanden wie in Aufgabe 2. Es fällt auf, dass die Summen bei beiden Drehungen konstant bleiben.
2. Liegt die grüne Fläche wieder auf der 35, ergibt sich 34 + 35 + 36 + 45 + 25 = 175. Beim Vergleich mit Aufgabe 2 fällt auf, dass die Summe konstant bleibt.
3. Liegt die grüne Fläche wieder auf der 35, ergibt sich die Summe

24 + 34 + 35 + 36 + 45 = 174.

Bei der Drehung um 90° ergibt sich: 25 + 35 + 36 + 44 + 45 = 185.

Bei der Drehung um 180° ergibt sich: 25 + 34 + 35 + 36 + 46 = 176

Bei jeder Drehung erhält man ein anderes Ergebnis. Dies legt die Vermutung nahe, dass nur bei symmetrischen Schablonen gleiche Summen entstehen.

1. Etienne hat Recht. Legt man das grüne Feld der folgenden Schablone auf die 35, so ergibt sich ebenfalls die Summe 175.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

1. Beispiel: Schablone 1 wird von 35 aus verschoben
2. Verschieben nach oben verringert die Summe um 100 (10 · 10). Verschieben nach unten erhöht die Summe um 100 (10 · 10).

Man erhält 4 + 5 + 15 + 25 + 26 = 75 bzw. 44 + 45 + 55 + 65 + 66 = 275.

1. Verschieben nach links verringert die Summe um 10 (5+5) und Verschieben nach rechts erhöht sie um 10.

Man erhält 22 + 23 + 33 + 43 + 44 = 165 bzw. 26 + 27 + 37 + 47 + 48 = 185

1. Verschieben nach unten erhöht die Summe um 100 und Verschieben nach rechts erhöht sie nochmals um 5. Somit erhöht sich die Summe insgesamt um 105.

Man erhält: 45 + 46 + 56 + 66 + 67 = 280.

1. Verschiebt man die Schablone um eine bestimmte Spaltenanzahl nach rechts, so erhöht sich die Summe um das Fünffache der entsprechenden Spaltenanzahl. Verschiebt man die Schablone um eine bestimmte Spaltenanzahl nach links, so verringert sich die Summe um das Fünffache der entsprechenden Spaltenanzahl.

Verschiebt man die Schablone um x Zeilen nach unten, so erhöht sich die Summe um das x-hoch-Zehnfache. Verschiebt man die Schablone um x Zeilen nach oben, so verringert sich die Summe um das x-hoch-Zehnfache.

1. Beobachtung: Die Endziffer der Summe ist stets entweder 5 oder 0.

Begründung: Mit Schablone 1 wird zu jeder Zahl die jeweils um 10 und 11 kleineren Zahlen sowie die um 10 und 11 größeren Zahlen addiert. Dies gleicht sich aus, sodass die Summe immer das Fünffache der Zahl, auf der das grüne Feld liegt, beträgt. Entsprechend ist die Summe durch 5 teilbar und endet auf 5 oder 0.